Une simple méthode pour adapter et résoudre des EDPs sur nuage de points.

François Lozes, Abderrahim Elmoataz

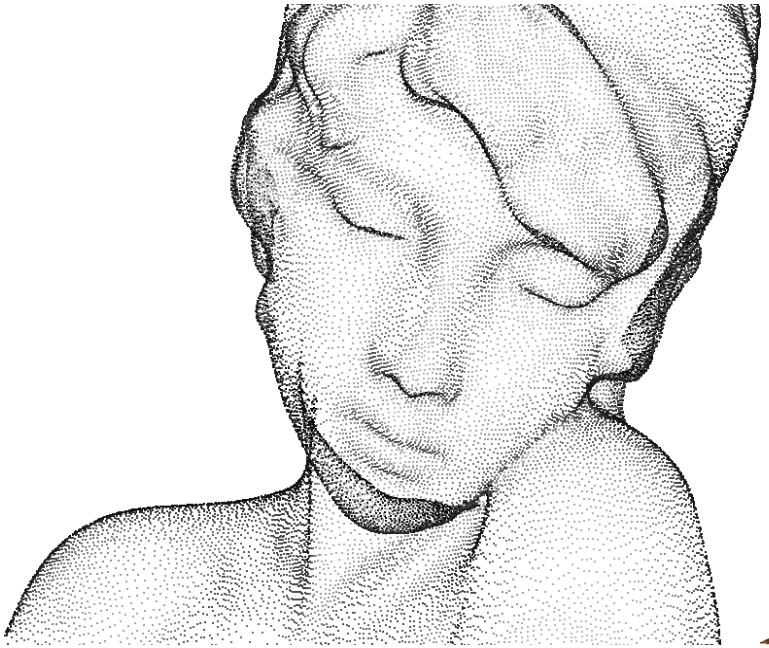
GREYC CNRS UMR 6072 - Image Team - Université de Caen Basse-Normandie - ENSICAEN
6, boulevard du Maréchal Juin 14050 Caen cedex
francois.lozes@unicaen.fr

Journée Traitement d'Images (Rouen)
9 avril 2015

Motivation

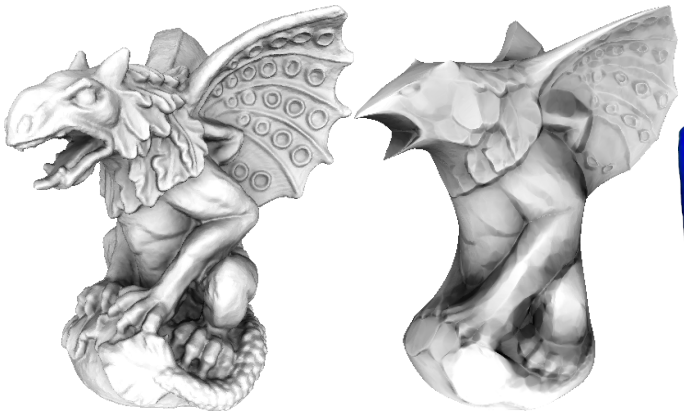
Beaucoup de données sont récoltées :

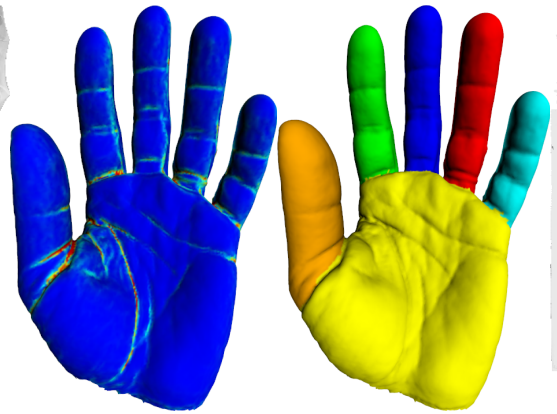
- Données ou de fonctions sur nuages de points.
- Données non organisées sur une grille cartésienne.
- Nécessité de traiter et à analyser ces nuages de points 3D.

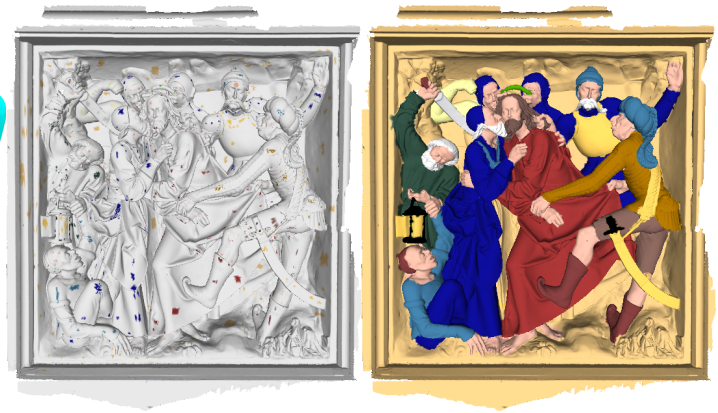


Motivation

- De nombreux problèmes inverses en traitement d'images peuvent se formuler par des EDPs.
- Extension sur des nuages de points 3D.







EDP sur surfaces

- Considérons une surface S correspondant à un nuage de points.
- Soit l'EDP à résoudre

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \phi(f, \nabla_S f, \nabla_S^2 f) \\ f(x,0) = f_0(x), \end{cases}$$

- Représentation intrinsèque : ensemble de polygones reliés entre eux

$$S = \{P_1, ...P_n\},$$

- Représentation implicite : $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 | \phi(x) = 0\}$$

- Représentation explicite, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$:

$$S = \{f(u,v)\} = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

EDP sur surface implicite

Fonctions de niveau-zéro :

- Soit $P_N v$ l'opérateur projection d'un vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ sur le plan orthogonal à N.
- Gradient sur surface S :

$$\nabla_S f(x) = P_N \nabla f(x)$$

- Laplacien sur surface S :

$$\Delta_S f(x) = \nabla \cdot (\nabla_S f(x)) = \nabla \cdot (P_N \nabla f(x))$$

Méthode au point le plus proche **[Ruuth and Merriman 2008]** :

- Opérateur du point le plus proche $cp : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
- Gradient sur surface :

$$\nabla_S f(x) = \nabla f(cp(x))$$

- Laplacien sur surface S :

$$\Delta_S f(x) = \nabla \cdot \nabla_S f(x) = \nabla \cdot \nabla f(cp(x))$$

Représentation des surfaces 3D

Résumé représentations des surfaces 3D :

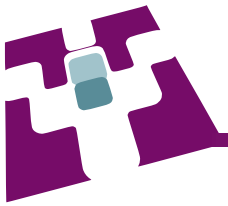
Représentation	**Avantage**	**Inconvénient**
Implicite	Topologie manipulable	Extension des données sur une grille Cartésienne
Explicite	Opérateurs différentiels	Paramétrisation des surfaces arbitraires compliquée
Intrinsèque	Opérateurs différentiels	Contraintes topologiques à respecter

EDP sur nuages de points 3D :

- Maillage local **[Lail et al 2013]** (intrinsèque).
- Paramétrisation local **[Liang et al. 2012]** (explicite).
- Extension grille Cartésienne **[Macdonal et al. 2013]** (implicite).

Sommaire

1. Notations, définitions et opérateurs
2. Transposition d'EDP sur nuages de points
3. Conclusion & Perspectives



Plan

1 Notations, définitions et opérateurs

2 Transposition d'EDP sur nuages de points

3 Conclusion & Perspectives

Transposition d'EDP sur graphe

- Soit l'EDP à résoudre

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \phi(f, \nabla_S f, \nabla_S^2 f) \\ f(x,0) = f_0(x), \end{cases}$$

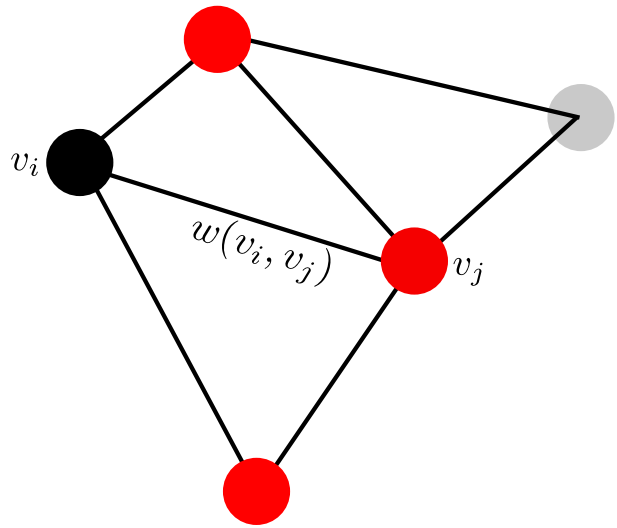
- Transposition d'EDP sur graphe

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \phi(f, \nabla_w f, \Delta_w f) \\ f(x,0) = f_0(x), \end{cases}$$

Définition

- Soit $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, w)$ un graphe de topologie arbitraire.
- Ensemble des sommets : $\mathcal{V} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$.
- Ensemble des arêtes
  $\mathcal{E} = \{(v_i, v_j) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} | v_j, v_i \in \mathcal{V} \text{ et } v_i \neq v_j\}$
- Fonction d'interraction symmétrique
  $w : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to [0, 1]$:

$$w(v_i, v_j) = w(v_j, v_i) = \begin{cases} [0,1] & \text{si } (v_i, v_j) \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



- Voisinage d'un sommet
  $N(v_i) = \{v_j \in \mathcal{V} | (v_i, v_j) \in \mathcal{E}\} = \{v_j \sim v_i\}$
- Bordure interne / externe de $A \subset \mathcal{V}$:

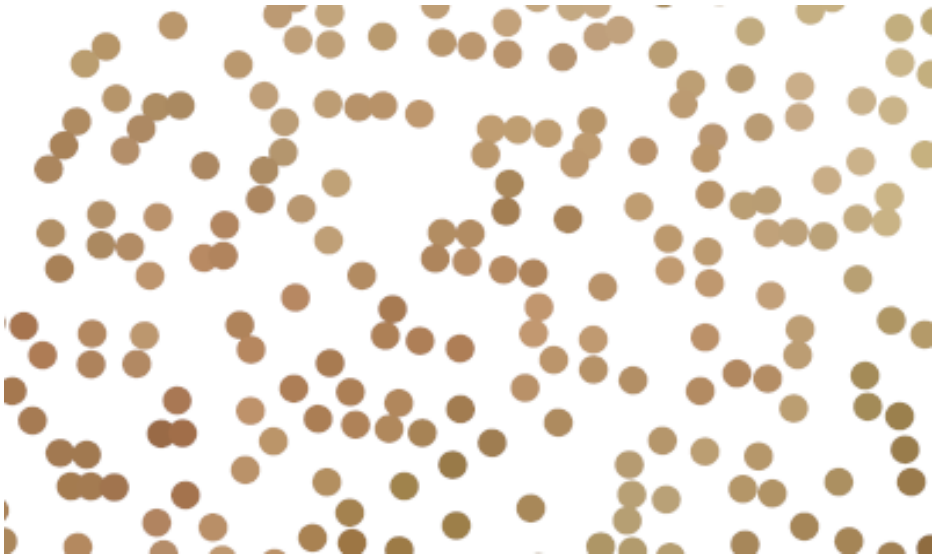
$$\begin{aligned} \partial^- A &= \{v_i \in A | \exists v_j \in A^c, v_j \sim v_i\} \\ \partial^+ A &= \{v_i \in A^c | \exists v_j \in A, v_j \sim v_i\} \end{aligned}$$

Construction d'un graphe à partir d'un nuage de points

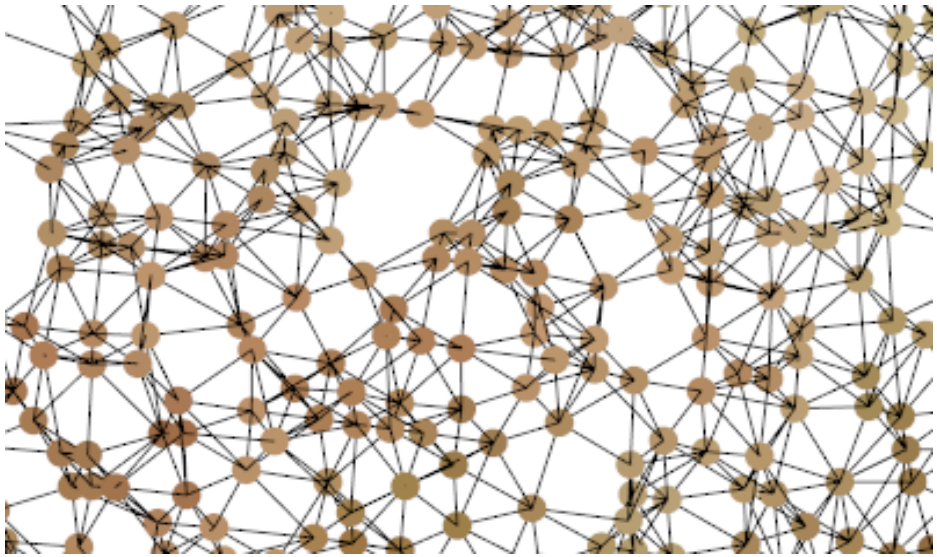
- Nuage de points $P = \{p_1, ..., p_n\}, p_i \in \mathbb{R}^3$: coordonnées 3D.
- Création du graphe $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, w)$:

$$\mathcal{E} = \{(v_i, v_j) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} | v_j \in K_k^{\mu}(v_i)\}$$

- Construction k-ppv symmétrique en fonction de la géométrie :



Nuage de points



Graphe

Création d'un patch

- Imagette 2D
- Capture les motifs répétitifs d'une texture.
- Extention patch sur un nuage de points 3D.

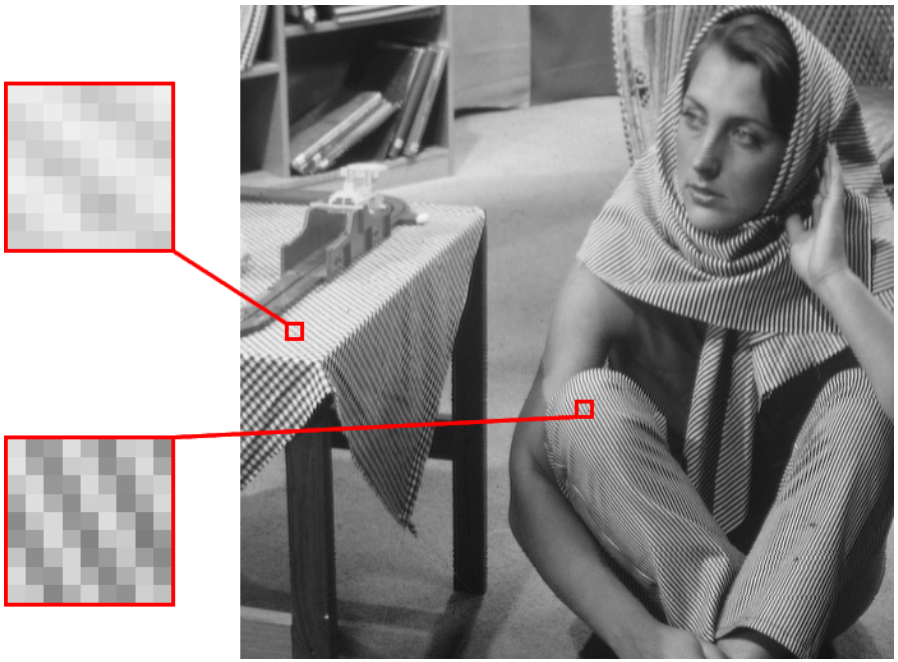
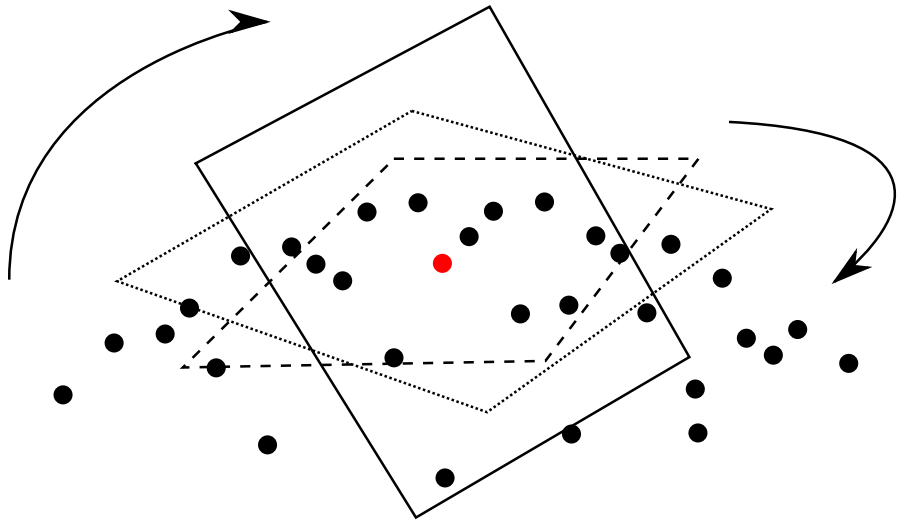


Image 2D



Nuage de points 3D

Création d'un patch

- Orientation du patch en un point dépend uniquement de la normale en ce point.
- Estimation des normales **[Hoppe et al. 1992]** :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(v_i) &= \left[\mathbf{p}(v_j) - \overline{\mathbf{p}}(v_i)\right] \cdot \left[\mathbf{p}(v_j) - \overline{\mathbf{p}}(v_i)\right]^T, v_j \sim v_i \\ (\mathbf{v_0}(v_i), \mathbf{v}_1(v_i), \mathbf{v}_2(v_i)) &= eig(\mathbf{C}(v_i)) \\ \mathbf{n}(v_i) &= \mathbf{v}_0(v_i) \end{aligned}$$

- Orientation patches :

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_0(v_i) &= \mathbf{n}(v_i) \\ \mathbf{t}_2(v_i) &= \mathbf{t}_0(v_i) \times \mathbf{t}_1(v_i) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \mathbf{t}_1(v_i) = \mathbf{z} \times \mathbf{t}_0(v_i) \text{ si } |\mathbf{z} \cdot \mathbf{t}_0(v_i)| \neq 1 \\ \mathbf{t}_1(v_i) = \mathbf{x} \times \mathbf{t}_0(v_i) \text{ sinon,} \end{cases}$$

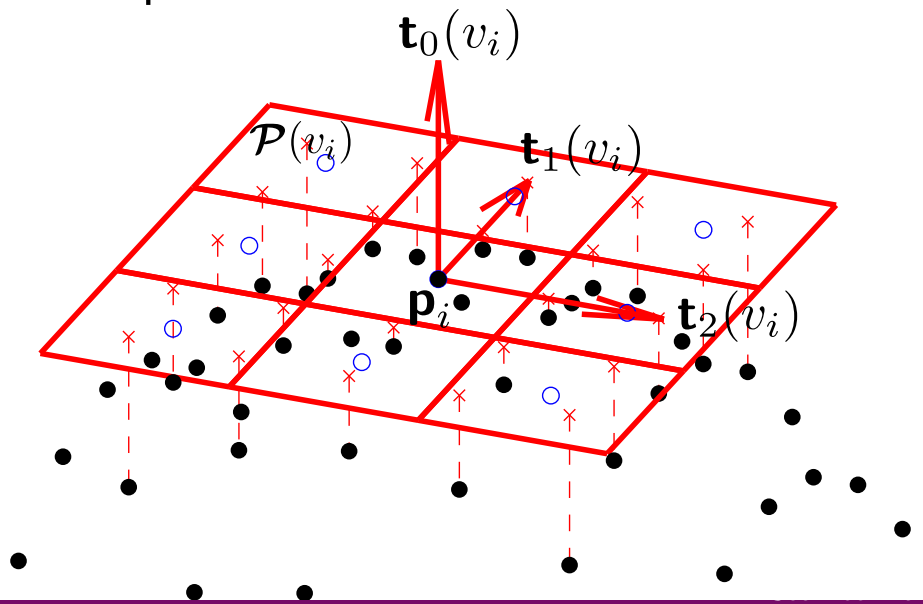
Création d'un patch

Remplissage du patch.

- Interpolation des valeurs des cellules du patch :

$$\mathcal{P}(v_i) = \left(\frac{\sum_{v_j \in V_k(v_i)} w(\mathbf{c}_k, \mathbf{p}_j) f^0(v_j)}{\sum_{v_j \in V_k(v_i)} w(\mathbf{c}_k, \mathbf{p}_j)} \right)^T_{k \in [1, n^2]},$$

- Projection voisins sur patch :



Création d'un patch

Remplissage du patch.

- Interpolation des valeurs des cellules du patch :

$$\mathcal{P}(v_i) = \left(\frac{\sum_{v_j \in V_k(v_i)} w(\mathbf{c}_k, \mathbf{p}_j) f^0(v_j)}{\sum_{v_j \in V_k(v_i)} w(\mathbf{c}_k, \mathbf{p}_j)} \right)^T_{k \in [1, n^2]},$$

- Patch hauteur :

$$f^0(v_j) = \langle \mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i, \mathbf{n}(v_i) \rangle.$$

- Patch couleur :

$$f^0(v_j) = f(v_j).$$

Création d'un patch

Remplissage du patch.

- Interpolation des valeurs des cellules du patch :

$$\mathcal{P}(v_i) = \left(\frac{\sum_{v_j \in V_k(v_i)} w(\mathbf{c}_k, \mathbf{p}_j) f^0(v_j)}{\sum_{v_j \in V_k(v_i)} w(\mathbf{c}_k, \mathbf{p}_j)} \right)^T_{k \in [1, n^2]},$$

- Patch hauteur :

$$f^0(v_j) = \langle \mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i, \mathbf{n}(v_i) \rangle.$$

- Patch couleur :

$$f^0(v_j) = f(v_j).$$

Fonction similarité

Fonction pondération $w : \mathcal{V} \rightarrow [0, 1]$, similarité.

- $w(v_i, v_j) = 1$
- Coordonnées, couleurs, ... :

$$w(v_i, v_j) = \mu(f(v_i), f(v_j))$$

- Patch hauteur, patch couleurs, ... :

$$w(v_i, v_j) = \mu(\mathcal{P}(v_i), \mathcal{P}(v_j))$$

Opérateurs sur graphe

- Soit $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, w)$ un graphe connexe pondéré
- Soient $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ et $F : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur G
- Opérateur de différence pondérée :

$$\partial_{v_j} f(v_i) = (d_w f)(v_i, v_j) = \sqrt{w(v_i, v_j)}(f(v_j) - f(v_i)).$$

- Opérateur adjoint de la différence :

$$(d_w^* H)(v_i) = \sum_{v_j \sim v_i} \sqrt{w(v_i, v_j)}(H(v_j, v_i) - H(v_i, v_j)).$$

- Opérateur de gradient pondéré :

$$(\nabla_w f)(v_i) = \left(\partial_{v_j} f(v_i)\right)^T_{v_j \in \mathcal{V}}$$

Opérateur p-laplaciens et ∞-laplacien

- Opérateur p-laplacien isotrope :

$$\begin{aligned}(\Delta^{i}_{w,p} f)(v_i) &= \frac{1}{2} d^{*}_{w}(||\nabla_w f||_2^{p-2} d_w f)(v_i) \\ &= \sum_{v_j \sim v_i} \frac{1}{2} w(v_i, v_j)(||\nabla_w f(v_i)||_2^{p-2} + ||\nabla_w f(v_j)||_2^{p-2})(f(v_i) - f(v_j))\end{aligned}$$

- Opérateur p-laplacien anisotrope :

$$\begin{aligned}(\Delta^{a}_{w,p} f)(v_i) &= \frac{1}{2} d^{*}_{w}(|d_w f|^{p-2} d_w f)(v_i) \\ &= \sum_{v_j \sim v_i} w(v_i, v_j)^{\frac{p}{2}} |f(v_j) - f(v_i)|^{p-2}(f(v_i) - f(v_j))\end{aligned}$$

- Laplacien-Beltrami :

$$\Delta f = div(grad\ f)$$

Opérateurs directionnels

Opérateurs directionnels

- Dérivées directionnelles
  - Externe

$$\partial^+_{v_j} f(v_i) = \max(0, (\partial_{v_j} f(v_i))$$

  - Interne

$$\partial^-_{v_j} f(v_i) = -\min(0, (\partial_{v_j} f(v_i))$$

- Gradients
  - Externe

$$(\nabla^+_w f)(v_i) = \left((\partial^+_{v_j} f)(v_i)\right)_{v_j \in \mathcal{V}}^T .$$

  - Interne

$$(\nabla^-_w f)(v_i) = \left((\partial^-_{v_j} f)(v_i)\right)_{v_j \in \mathcal{V}}^T .$$

- Opérateur ∞-laplacien **[Elmoataz et al. 2012]** :

$$(\Delta_{w,\infty} f)(v_i) = \frac{1}{2}\left[||(\nabla^+_w f)(v_i)||_\infty - ||(\nabla^-_w f)(v_i)||_\infty||\right]$$

Transcription sur graphe les opérateurs de la morphologie mathématique :

- Dilatation

$$\frac{\partial f(v_i)}{\partial t} = +||(\nabla^+_w f)(v_i)||_p$$

- Erosion

$$\frac{\partial f(v_i)}{\partial t} = -||(\nabla^-_w f)(v_i)||_p$$

Discrétisation d'opérateurs

- Laplacien anisotrope sur graphe discret :

$$\Delta_p^a f(u) = \sum_{\sim v,u} \sqrt{w(u,v)}^p |f(u) - f(v)|^{p-2}(f(u) - f(v))$$

- Pour $e = (u, v)$:

$$\frac{\partial f}{\partial e}|_u = \sqrt{w(u,v)}(f(v) - f(u))$$

$$\Delta_p^a f(u) = \sum_{\sim v,u} \frac{\partial}{\partial e}\left(|\frac{\partial}{\partial e} f|^{p-2}\frac{\partial f}{\partial e}\right)|_u$$

- Equivalent continue local :

$$\Delta_p^a f(u) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\frac{\partial}{\partial x_i} f|^{p-2}\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

Unification non-local

- Laplacien non-local anisotrope sur graphe discret :

$$\Delta_p^a f(u) = \sum_{(u,v)\in\mathcal{V}\times\mathcal{V}} \sqrt{w(u,v)}^p |f(u)-f(v)|^{p-2}(f(u)-f(v))$$

- Equivalent continue non-local :

$$\Delta_p^a f(u) = \int_\Omega \sqrt{w(u,v)}^p |f(u)-f(v)|^{p-2}(f(u)-f(v))\ dv$$

Plan

1 Notations, définitions et opérateurs

2 Transposition d'EDP sur nuages de points

3 Conclusion & Perspectives

Transposition d'EDP sur graphe

- Considérons une surface S correspondant à un nuage de points.
- Soit l'EDP à résoudre

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \phi(f, \nabla_S f, \nabla_S^2 f) \\ f(x,0) = f_0(x), \end{cases}$$

- Transposition d'EDP sur graphe

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \phi(f, \nabla_w f, \Delta_w f) \\ f(x,0) = f_0(x), \end{cases}$$

- Schéma de résolution :

$$\frac{f^{n+1}(v_i) - f^n(v_i)}{\Delta t} = \phi(f, \nabla_w f, \Delta_w f)(v_i),$$

$$f^{n+1}(v_i) = f^n(v_i) + \Delta t \phi(f, \nabla_w f, \Delta_w f)(v_i),$$

Équation de la chaleur

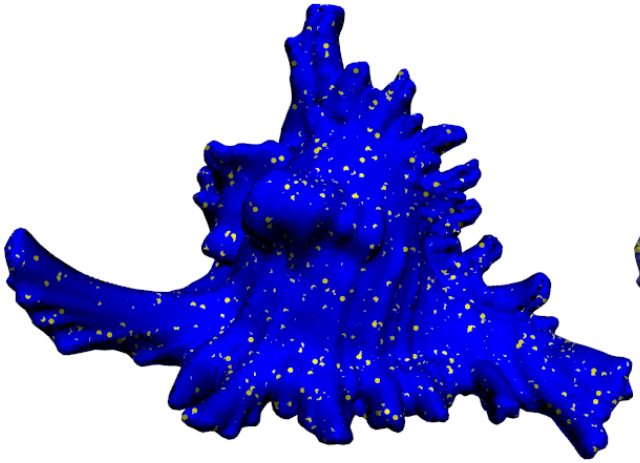
- EDP à résoudre :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \Delta_S f(x,t) \\ f(x,0) = f^0(x) \end{cases}$$

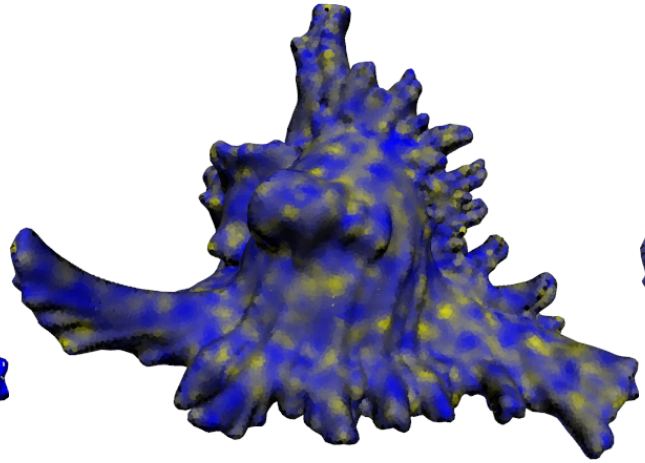
- Formulation sur graphe :

$$\begin{cases} f^{(n+1)}(v_i) = f^{(n)}(v_i) - \Delta t(\Delta_{w,2} f)(v_i), \\ f^{(0)}(v_i) = f^0(v_i), \end{cases}$$

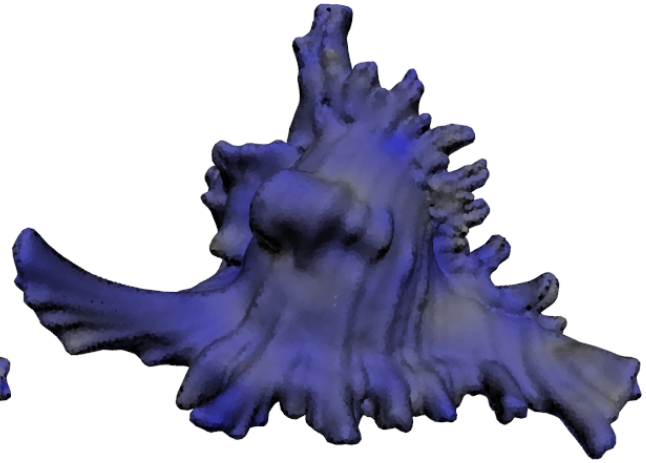
Équation de la chaleur



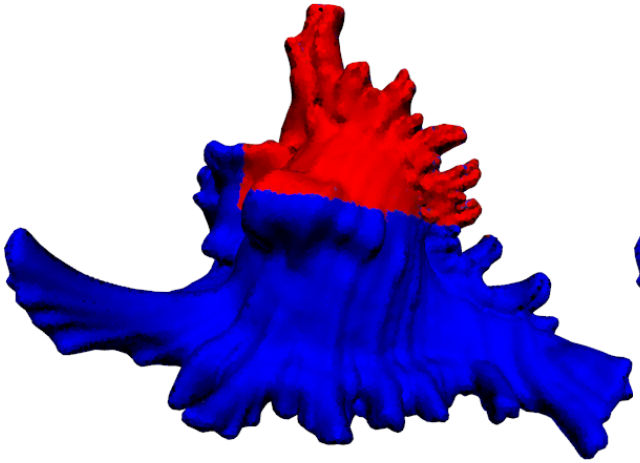
Original



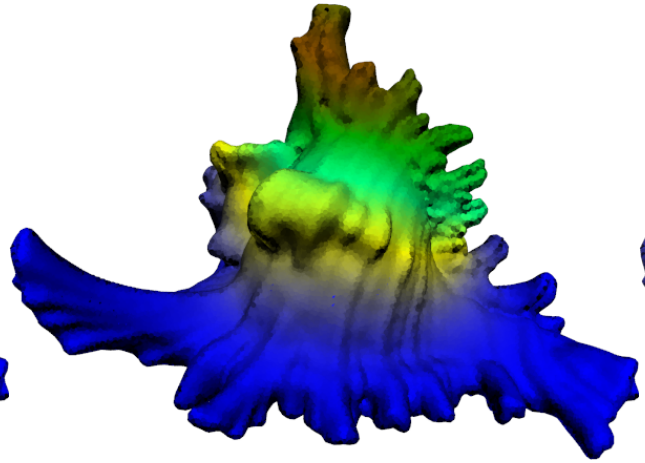
40k itérations



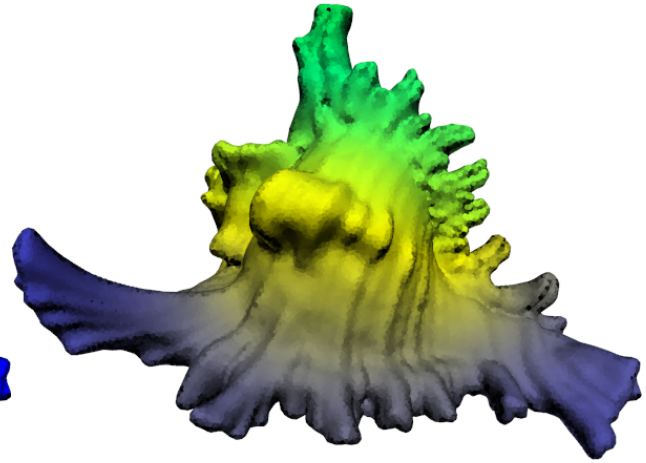
400k itérations



Original



100k itérations



900k itérations

Modèle de réaction-diffusion

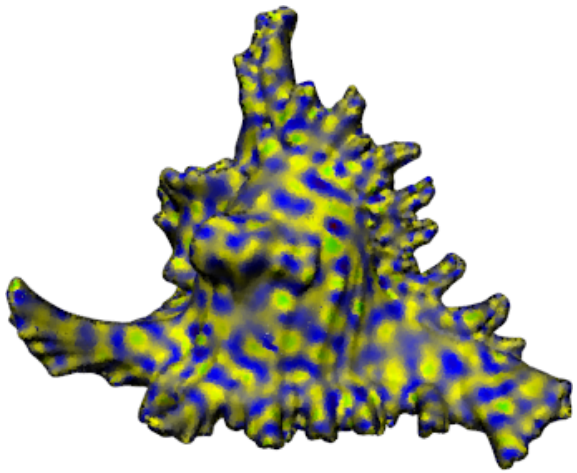
- Paire d'EDP à résoudre **[A.M. Turing, 1952]** :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = F(f,g) + D_f \Delta_S f \\ \dfrac{\partial g}{\partial t} = G(f,g) + D_g \Delta_S g \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} F(f,g) = s(fg - f - \alpha) \\ G(f,g) = s(\beta - fg) \\ f^{(0)} = f^0 \\ g^{(0)} = g^0 \end{cases}$$

- Résolution sur graphe :

$$\begin{cases} f^{(n+1)}(v_i) = f^{(n)}(v_i) - \Delta t \left[F(f,g)(v_i) + D_f (\Delta_{w,2} f)(v_i) \right] \\ g^{(n+1)}(v_i) = g^{(n)}(v_i) - \Delta t \left[G(f,g)(v_i) + D_g (\Delta_{w,2} g)(v_i) \right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} f^{(0)} = g^{(0)} = 4 \\ s = 1/128 \\ \alpha(v_i) = 12 \pm 0.012 \\ \beta(v_i) = 12 \pm 0.012 \end{cases} \qquad \begin{cases} D_f = 1/16 \\ D_g = 1/4 \\ \Delta t = 0.1 \end{cases}$$



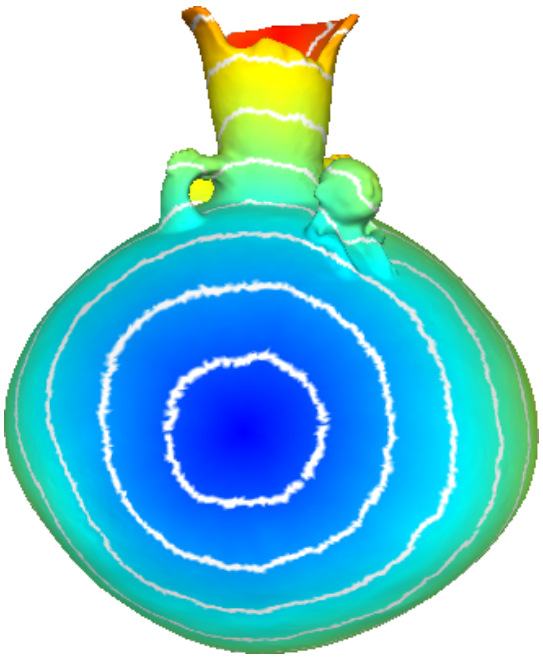
Équation eikonale

- Soit $f, \phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$
- Formulation sur graphe **[Desquesnes et al., 2013]** :

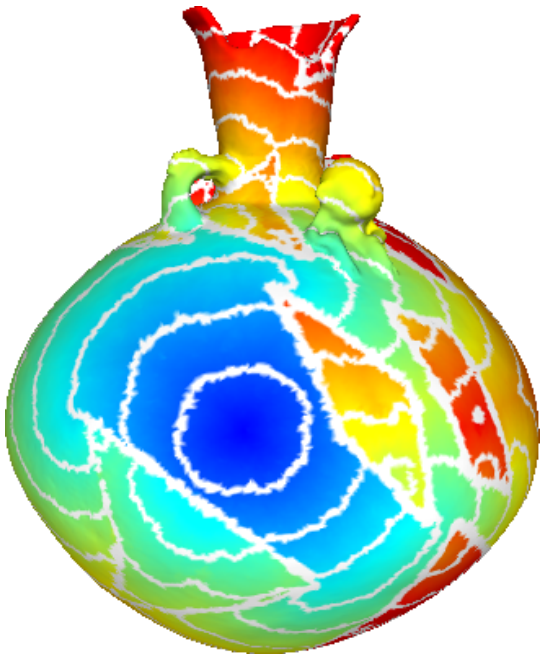
$$\begin{cases} ||\nabla_w^- f(v_i)||_p = 1 & v_i \in \mathcal{V} \\ f(v_i) = 0 & v_i \in \gamma \subset \mathcal{V}, \end{cases}$$

- Distance généralisé sur graphes.

Original



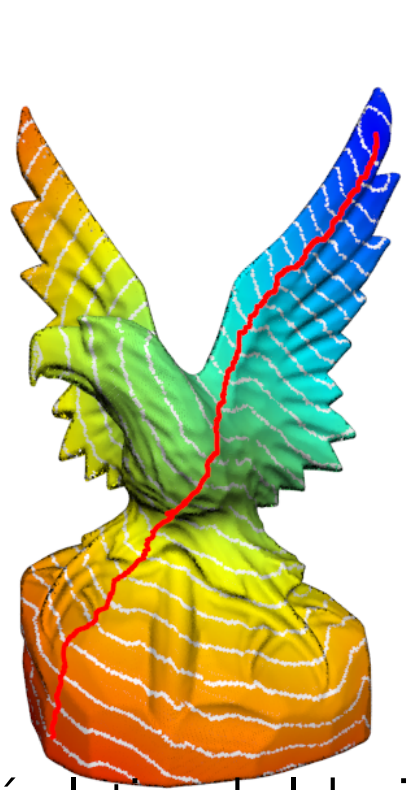
$w = 1$

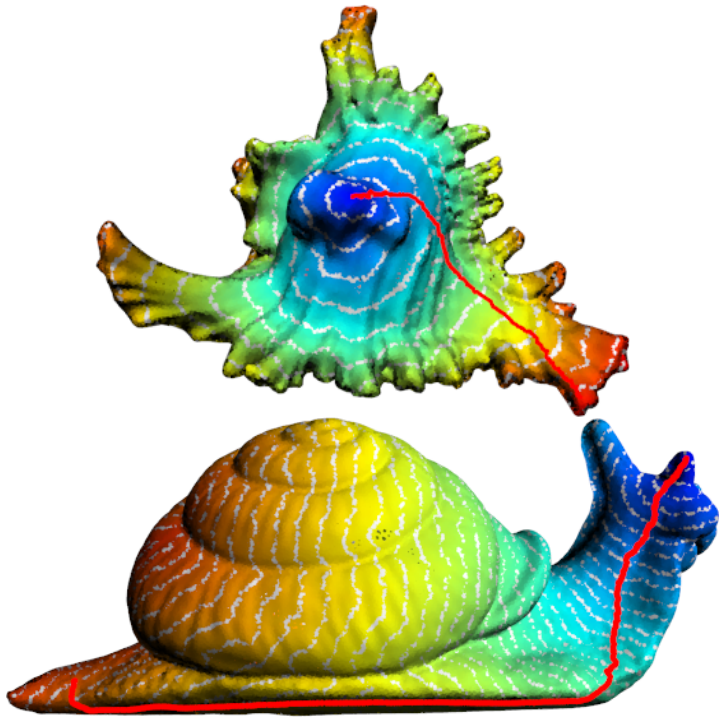


$w = couleur$

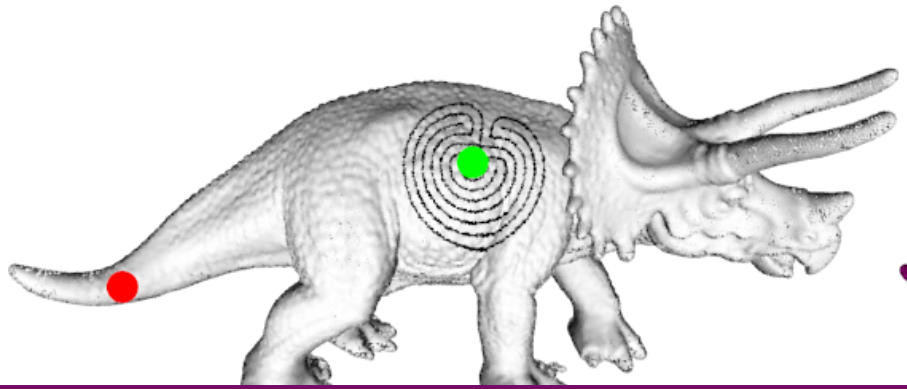
Équation eikonale

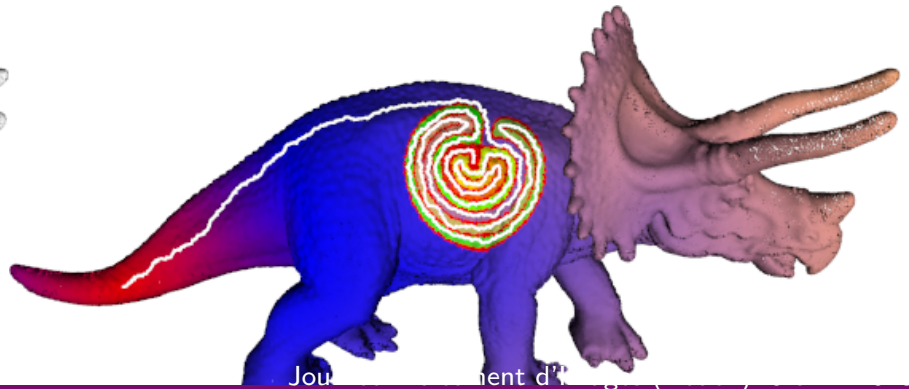
- Distance géodésique et chemins minimaux sur nuages de points





- Résolution de labyrinthes sur nuage de points





Opérateurs basés morphologiques

- Processus morphologique continue :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = + ||(\nabla f)|| \quad \text{(dilatation)},$$
$$\frac{\partial f}{\partial t} = - ||(\nabla f)|| \quad \text{(érosion)}.$$

- Généralisation opérateurs morphologiques sur graphes :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(v_i, t) = +||(\nabla_w^- f)(v_i)||_p^q,$$
$$\frac{\partial f}{\partial t}(v_i, t) = -||(\nabla_w^- f)(v_i)||_p^q.$$

- Pour $p = \infty$ et $q = 1$:

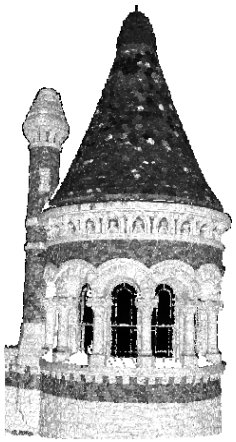
$\frac{\partial f}{\partial t}(v_i, t) = +||(\nabla_w^+ f)(v_i)||_\infty$, $\quad NLD(f)(v_i) = f(v_i) + \max_{v_j \sim v_i} \sqrt{(w(v_i, v_j))}(f(v_j) - f(v_i))^+$

$\frac{\partial f}{\partial t}(v_i, t) = -||(\nabla_w^- f)(v_i)||_\infty$. $\quad NLE(f)(v_i) = f(v_i) + \max_{v_j \sim v_i} \sqrt{(w(v_i, v_j))}(f(v_i) - f(v_j))^+$

$NLA(f)(v_i) = \frac{1}{2}(NLD(f)(v_i) + NLE(f)(v_i))$

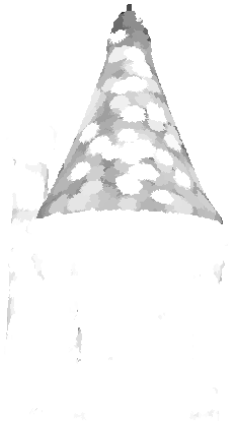
Filtrage Morphologiques

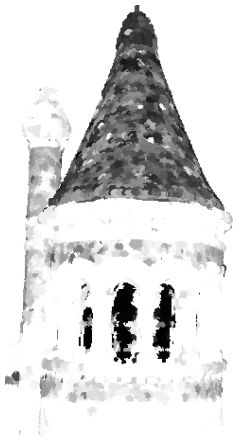
Filtrage couleur $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$



Original

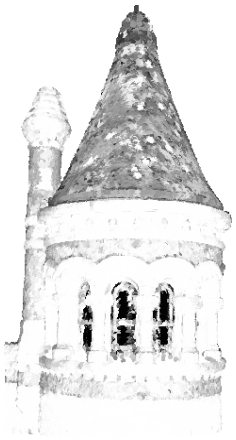
Local





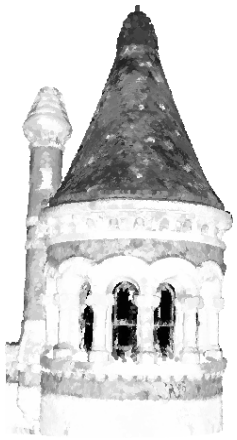
Non-local

Érosion



Dilation

Ouverture



Fermeture

Inpainting colorimétrique

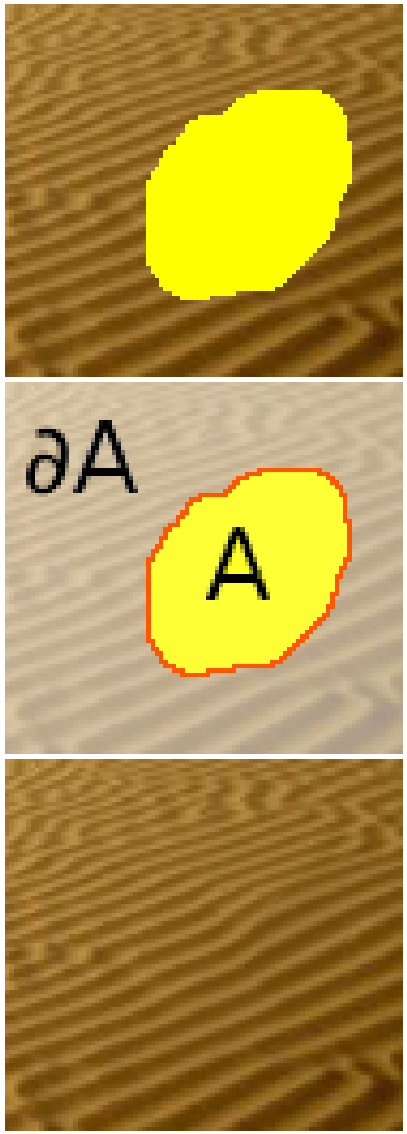
- Interpolation de données manquantes f :

$$\begin{cases} f(v_i) = NLA(f)(v_i) & \forall v_i \in \mathcal{A}, \\ f(v_i) = f^0(v_i) & \forall v_i \in \partial\mathcal{A}. \end{cases}$$

- Algorithme itératif :

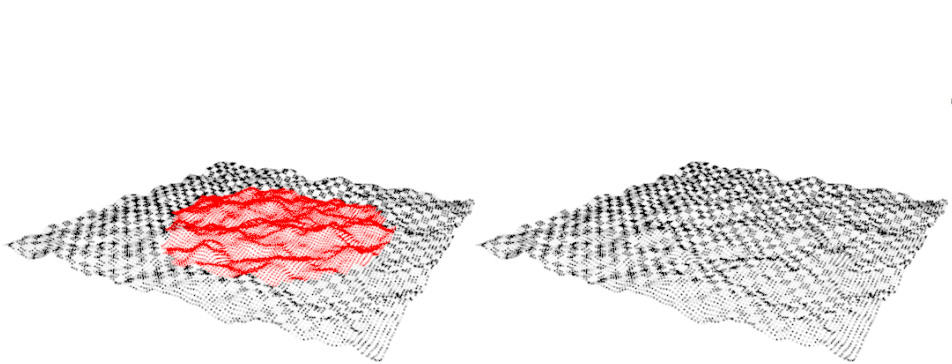
$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(v_i) &= \begin{cases} NLA(f^{(n)})(v_i) & \forall v_i \in \partial^- \mathcal{A}, \\ f^{(n)}(v_i) & \forall v_i \in \partial\mathcal{A}. \end{cases} \\ \partial\mathcal{A}^{(n+1)} &= \partial\mathcal{A}^{(n)} \cup \partial^- \mathcal{A}^{(n)} \end{aligned}$$

- w : similarité patch couleurs.

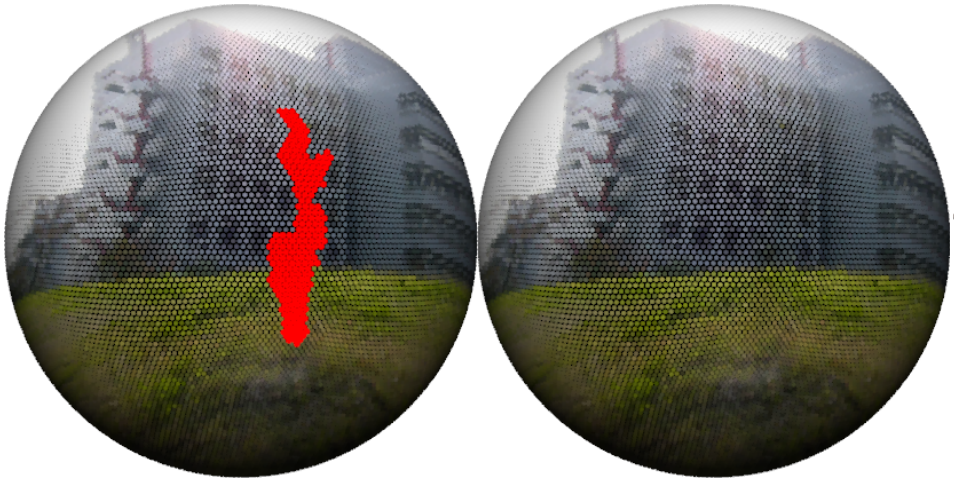


Inpainting colorimétrique

Inpainting sur des surfaces et nuages points 3D ($\alpha = \beta = 0, \gamma = 1$).



Original À inpainter



Local Non-local

Colorisation

Cas images : $I : V \to \mathbb{R}$ (luminance)

- Interpolation chrominance $f^0 : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^3$:

$$f^0(v_i) = \begin{cases} \left[\frac{r(v_i)}{I(v_i)}, \frac{g(v_i)}{I(v_i)}, \frac{b(v_i)}{I(v_i)}\right] & v_i \in \partial A \\ [0,0,0] \quad v_i \in A, \end{cases}$$

- Pondération w selon la luminance.
- Algorithme itératif :

$$f^{(n+1)}(v_i) = \begin{cases} NLA(f^{(n)})(v_i) & v_i \in A \\ f^0(v_i) & v_i \in \partial A \end{cases}$$

Colorisation

Cas de nuages de points 3D.

- Interpolation chrominance $f^0 : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^3$:

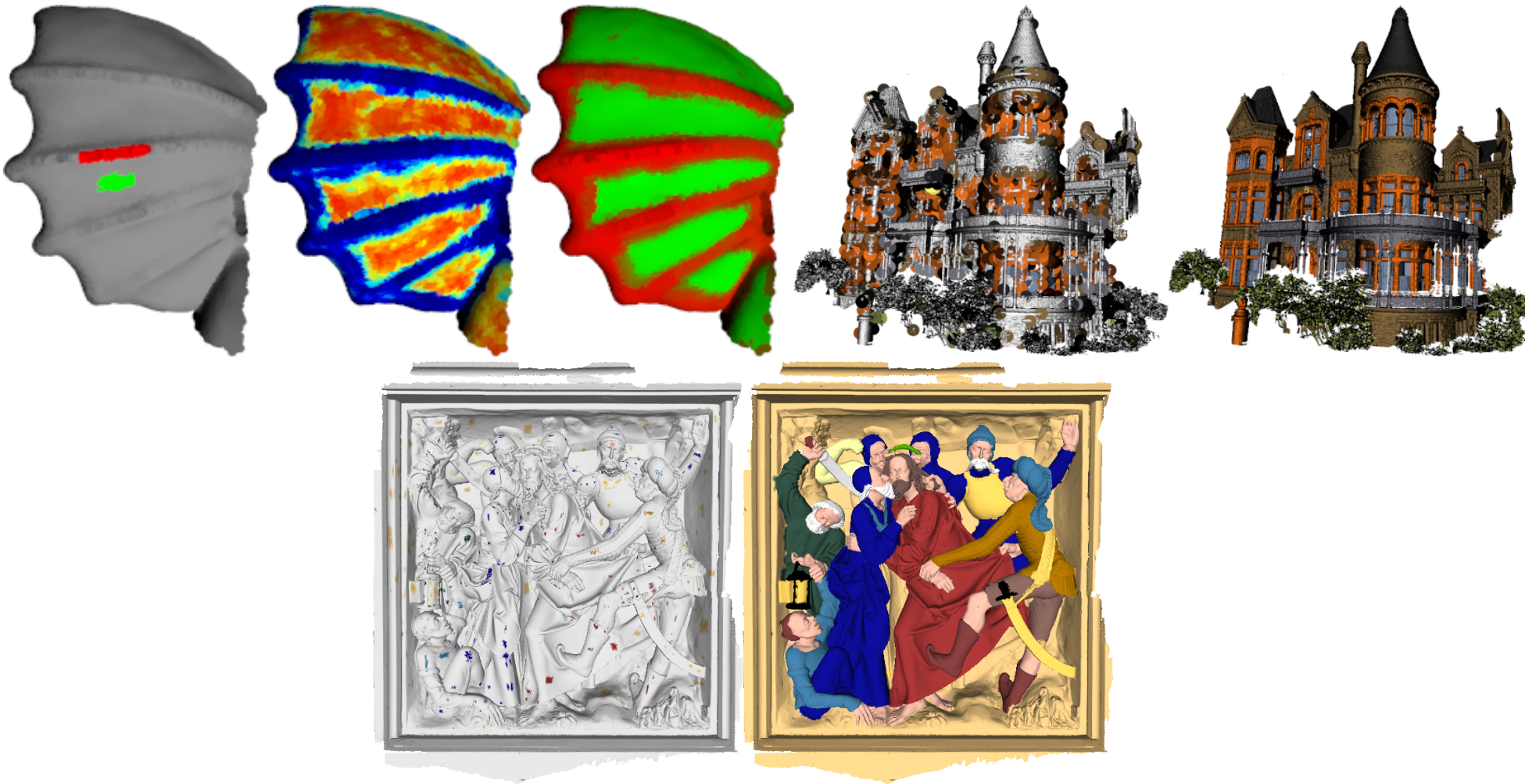
$$f^0(v_i) = \begin{cases} [r(v_i), g(v_i), b(v_i)] & v_i \in \partial A \\ [0,0,0] & v_i \in A, \end{cases}$$

- Pondération w selon patch saillance
- Algorithme itératif :

$$f^{(n+1)}(v_i) = \begin{cases} NLA(f^{(n)})(v_i) & v_i \in A, \\ f^0(v_i) & v_i \in \partial A, \end{cases}$$

Colorisation

Colorisation de nuages de points 3D.



Plan

1 Notations, définitions et opérateurs

2 Transposition d'EDP sur nuages de points

3 Conclusion & Perspectives

Conclusion

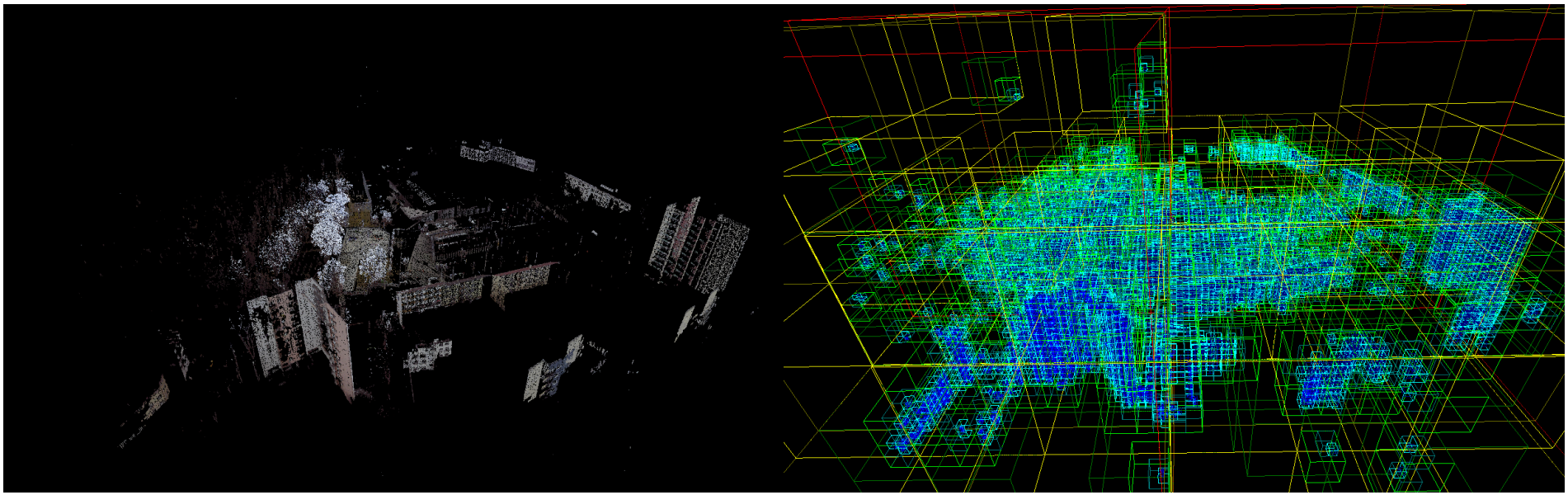
- Approche extrêment simple pour résoudre et adapter des EDPs sur nuage de points 3D.
- Pas de prétraitement, unification traitements locaux / non-locaux.
- Opérateur généralisant le Laplacien isotrope / anisotrope.
- EDPs pour résoudre des problèmes de restauration ou d'interpolation sur nuages de points.

Perspectives

- Comparer l'approximation des opérateurs différenciels par rapport aux autres représentations.
- Adapter la résolution d'EDPs à d'autres applications.
- Étendre les traitements à des nuages de points massifs ($>$ 1 milliard de points).

Visualiseur

- Affichage de nuage de points massif
- Représentation hierachique de l'espace



DEMO

GREYC

REGION BASSE NORMANDIE

Merci de votre attention.

F. Lozes, A. Elmoataz et O. Lézoray. **Color Point Clouds for Cultural Heritage : Opportunities for Graph Signal Processing** IEEE Signal Processing Magazine Special Issue dedicated to Signal Processing for Art investigation, 2015

F. Lozes, A. Elmoataz et O. Lézoray. **Partial Difference Operators on Weighted Graphs for Image Processing on Surfaces and Point Clouds** IEEE Transactions on Image Processing, 2014, pp. 3896-3909

D. Tenbrinck, A. Elmoataz et F. Lozes. **Solving Minimal Surface Problems on Surfaces and Point Clouds**, IEEE Scale Space and Variational Methods in Computer Vision (SSVM), 2015